ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ HUYỀN TRANG

MỘT PHƯƠNG PHÁP CHIẾU CO HẸP GIẢI BÀI TOÁN KHÔNG ĐIỂM CHUNG TÁCH TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. TS. Trương Minh Tuyên
2. TS. Li Quanqing

Thái Nguyên – 2019

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Trương Minh Tuyên, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, các thầy giáo, cô giáo trong khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường.

Nhân dịp này, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, người thân, bạn bè đã động viên, khích lệ, tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\cap$	phép giao
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\max M$	số lớn nhất trong tập hợp số M
$\min M$	số nhỏ nhất trong tập hợp số M
$\operatorname{argmin}_{x\in X} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên X
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm khả tích bậc p trên Ω
l^p	không gian các dãy số khả tổng bậc p
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J_E	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên E
j_E	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị trên E

$\delta_E(\varepsilon)$	mô đun lồi của không gian Banach E
$\rho_E(\tau)$	mô đun trơn của không gian Banach E
$Fix(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
P_C	phép mêtric lên C
Π_C	phép chiếu tổng quát lên C
i_C	hàm chỉ của tập lồi C

Mở đầu

Cho C và Q là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của các không gian Hilbert H_1 và H_2, tương ứng. Cho $T: H_1 \longrightarrow H_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn và $T^*: H_2 \longrightarrow H_1$ là toán tử liên hợp của T. Bài toán chấp nhận tách (SFP) có dạng như sau:

$$\text{Tìm một phần tử} \quad x^* \in S = C \cap T^{-1}(Q) \neq \emptyset. \tag{SFP}$$

Mô hình bài toán (SFP) lần đầu tiên được giới thiệu và nghiên cứu bởi Y. Censor và T. Elfving [5] cho mô hình các bài toán ngược. Bài toán này đóng vai trò quan trọng trong khôi phục hình ảnh trong Y học, điều khiển cường độ xạ trị trong điều trị bệnh ung thư, khôi phục tín hiệu (xem [3], [4]) hay có thể áp dụng cho việc giải các bài toán cân bằng trong kinh tế, lý thuyết trò chơi (xem [13]).

Giả sử C là một tập con lồi và đóng của không gian Hilbert H_1. Ta biết rằng tập điểm cực tiểu của hàm chỉ

$$i_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \in C, \\ \infty, & \text{nếu } x \notin C \end{cases}$$

là $\arg\min_{H_1} i_C(x) = C$. Do đó, ta nhận được $C = (\partial i_C)^{-1}(0)$, với ∂i_C là dưới vi phân của i_C (Rockafellar [11] đã chỉ ra rằng ∂i_C là một toán tử đơn điệu cực đại). Ngoài ra, C cũng là tập không điểm của toán tử đơn điệu A xác định bởi $A = I - P_C$. Do đó, ta có thể xem bài toán chấp nhận tách (SFP) là trường hợp riêng của bài toán không điểm chung tách.

Bài toán không điểm chung tách được phát biểu ở dạng sau: Cho $A: H_1 \longrightarrow 2^{H_1}$ và $B: H_2 \longrightarrow 2^{H_2}$ là các toán tử đơn điệu cực đại và cho $T: H_1 \longrightarrow H_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn.

$$\text{Tìm một phần tử} \quad x^* \in S = A^{-1}(0) \cap T^{-1}\big(B^{-1}(0)\big) \neq \emptyset. \tag{SCNPP}$$

Cho đến nay Bài toán (SCNPP) đã và đang là chủ đề thu hút nhiều người làm toán trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Mục đích của luận văn này là trình bày lại các kết quả của T.M. Tuyen, N.S Ha, N.T.T Thuy trong tài liệu [15] về phương pháp chiếu co hẹp cho Bài toán (SCNPP) trong không gian Banach.

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn đề cập đến một số vấn đề về cấu trúc hình học của các không gian Banach như không gian Banach lồi đều, không gian Banach trơn đều, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc; phép chiếu mêtric và phép chiếu tổng quát; toán tử đơn điệu trong không gian Banach, toán tử giải mêtric và toán tử giải tổng quát.

Chương 2. Một phương pháp chiếu co hẹp giải bài toán không điểm chung tách

Trong chương này luận văn tập trung trình bày lại một cách chi tiết các kết quả của T.M. Tuyen, N.S Ha, N.T.T Thuy [15] về phương pháp chiếu co hẹp cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach. Ngoài ra, trong chương này luận văn cũng đề cập đến một số ứng dụng của định lí chính (Định lí 2.1) cho một số bài toán liên quan như bài toán điểm cực tiểu tách, bài toán chấp nhận tách đa tập và bất đẳng thức biến phân tách.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao bồm 4 mục. Mục 1.1 trình bày về một số tính chất cơ bản của không gian phản xạ, không gian Banach lồi đều, trơn đều. Mục 1.2 giới thiệu về ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc. Mục 1.3 đề cập đến khái niệm phép chiếu mêtric và một số tính chất cơ bản. Mục 1.4 trình bày về toán tử đơn điệu trong không gian Banach, toán tử giải mêtric và ε-mở rộng của một toán tử đơn điệu. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [1, 6, 7, 8, 9].

1.1. Một số vấn đề về hình học các không gian Banach

Cho E là một không gian Banach và E^* là không gian đối ngẫu của nó. Để cho đơn giản và thuận tiện hơn, chúng tôi thống nhất sử dụng kí hiệu $\|.\|$ để chỉ chuẩn trên E và E^*; Sự hội tụ mạnh và yếu của dãy $\{x_n\}$ về phần tử x trong E lần lượt được kí hiệu là $x_n \to x$ và $x_n \rightharpoonup x$ trong toàn bộ luận văn.

Trong luận văn này, chúng tôi thường xuyên sử dụng tính chất dưới đây của không gian Banach phản xạ.

Mệnh đề 1.1. (xem [1] trang 41) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

i) *E là không gian phản xạ.*

ii) *Mọi dãy bị chặn trong E, đều có một dãy con hội tụ yếu.*

Mệnh đề dưới đây cho ta mối liên hệ giữa tập đóng và tập đóng yếu trong không gian tuyến tính định chuẩn.

Mệnh đề 1.2. *Nếu C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian không gian tuyến tính định chuẩn X, thì C là tập đóng yếu.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $x_n \rightharpoonup x$, nhưng $x \notin C$. Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại $x^* \in X^*$ tách ngặt x và C, tức là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\langle y, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

với mọi $y \in C$. Đặc biệt, ta có

$$\langle x_n, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

với mọi $n \geq 1$. Ngoài ra, vì $x_n \rightharpoonup x$, nên $\langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$. Do đó, trong bất đẳng thức trên, cho $n \to \infty$, ta nhận được

$$\langle x, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

điều này là vô lý. Do đó, điều giả sử là sai, hay C là tập đóng yếu.
Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Chú ý 1.1. Nếu C là tập đóng yếu, thì hiển nhiên C là tập đóng.

Định nghĩa 1.1. Cho $D \subset E, f: \ D \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

i) Hàm f được gọi là chính thường nếu dom $f \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty (\forall x \in D)$, trong đó
$$\text{dom } f = \{x \in D : f(x) < \infty\}.$$

ii) Hàm f được gọi là hàm lồi trên D nếu epi f là tập lồi trong $E \times \mathbb{R}$, trong đó
$$\text{epi } f = \{(x, r) \in D \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

iii) Hàm $f : D \subset E \to \mathbb{R}$ được gọi là nửa liên tục dưới tại điểm $\overline{x} \in D$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ có một $\delta > 0$ sao cho $f(\overline{x}) - \varepsilon \leq f(x)$ với mọi $x \in D$, $\|x - \overline{x}\| < \delta$.
Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới trên D nếu f nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x \in D$.

Dưới đây là ví dụ về hàm nửa liên tục dưới.

Ví dụ 1.1. Cho $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{khi} \quad x = 0. \end{cases}$$

Khi đó, hàm f là hàm nửa liên tục dưới tại điểm $x = 0$, nhưng không liên tục tại $x = 0$.

Thật vậy, dễ thấy f không liên tục tại $x = 0$. Với mọi $\varepsilon > 0$ và với mọi $\delta > 0$ (trong trường hợp này có thể chọn δ là số dương bất kỳ) ta có

$$f(0) - \varepsilon = -1 - \varepsilon < -1 \leq f(x),$$

với mọi x. Do đó, f là nửa liên tục dưới tại 0.

Mệnh đề dưới đây cho ta một điều kiện về sự tồn tại điểm cực tiểu của một phiếm hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trong không gian Banach phản xạ.

Mệnh đề 1.3. *Cho C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Banach phản xạ E và $f: C \longrightarrow (-\infty, \infty]$ là một hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên C, sao cho $f(x_n) \to \infty$ khi $\|x_n\| \to \infty$. Khi đó, tồn tại $x_0 \in dom(f)$ sao cho*

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C\}.$$

Chứng minh. Đặt $m = \inf\{f(x) : x \in C\}$. Khi đó, tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $f(x_n) \to m$ khi $n \to \infty$. Nếu $\{x_n\}$ không bị chặn, thì tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\|x_{n_k}\| \to \infty$. Theo giả thiết, $f(x_{n_k}) \to \infty$, mâu thuẫn với $m \neq \infty$. Do đó, $\{x_n\}$ bị chặn. Theo Mệnh đề 1.1 và Mệnh đề 1.2, tồn tại dãy con $\{x_{n_j}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_j} \rightharpoonup x_0 \in C$. Vì f là nửa liên tục dưới trong tôpô yếu, nên ta có

$$m \leq f(x_0) \leq \liminf_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = m.$$

Do đó, $m = f(x_0)$.
Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Tiếp theo, trong mục này chúng tôi đề cập đến một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học các không gian Banach, như: tính lồi, tính trơn, mô đun lồi, mô đun trơn ...